TRIGONOMETRIA

La trigonometría estudia las relaciones existentes entre los ángulos y los lados de un triángulo. La base de su estudio es el ángulo.

Angulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común. Según el sentido del giro decimos que:

Un ángulo es **positivo** si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.

Un ángulo es **negativo** si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Unidades. Para medir ángulos se emplean como medidas principales:

- El giro o ángulo completo.
- El ángulo llano.
- El cuadrante o ángulo recto.

Para unidades secundarias se emplean tres sistemas:

- **Sistema sexagesimal**. Un grado sexagesimal es 1/360 parte del ángulo completo. El grado a su vez se divide en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos.
- **Sistema centesimal**. Un grado centesimal es 1/400 parte del ángulo completo. Cada grado centesimal se divide a su vez en 100 minutos centesimales y este a su vez en 100segundos centesimales.
- **Radianes**. Radian es el ángulo central cuyo arco tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia.

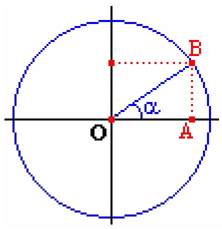
$$\pi \text{ radianes} <> 180^{\circ}$$

Razones trigonométricas de un ángulo.

Seno de un ángulo es la razón constante entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo es la razón constante entre el cateto contiguo ó adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo es la razón constante entre el cateto opuesto y el cateto contiguo ó adyacente.



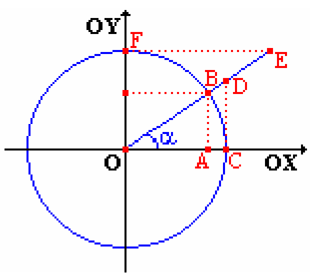
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$$

Líneas trigonométricas.

Las razones trigonométricas se pueden asociar a las longitudes de los segmentos que genera el radiovector que forma el ángulo en la circunferencia gnométrica(Radio=1).

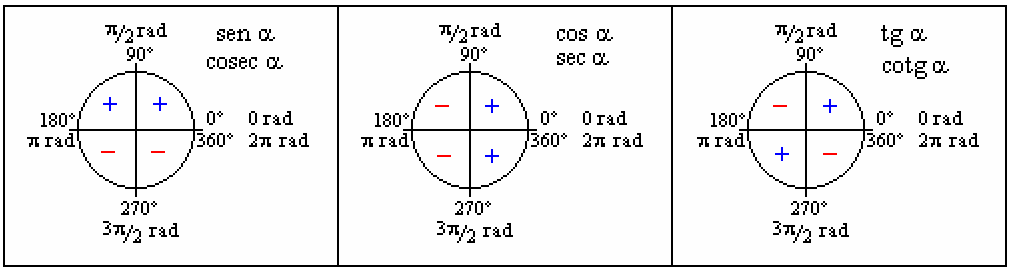


$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{AB} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \overline{OE}$$

$$\cos\alpha = \overline{OA} \qquad \sec\alpha = \overline{OD}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \overline{CD} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \overline{FE}$$

Signo de las rezones trigonométricas



Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo.

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$$
$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\ \alpha$$
$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$$
$$1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$$

Estas relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo nos permite que, conocida una razón trigonométrica y el cuadrante al que pertenece el ángulo, poder calcular las restantes razones. Es un ejercicio muy básico dentro de la trigonometría y lo único que requiere es conocer las relaciones entre ellas y el signo que toman en cada cuadrante.

El siguiente cuadro recoge todas las relaciones que se pueden utilizar en este tipo de ejercicio.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1: \begin{cases} \text{sen}\ \alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \end{cases} \qquad \text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{cotag}\ \alpha = \frac{1}{\text{tag}\ \alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad \text{cotag}^2\alpha + 1 = \text{cos ec}^2\alpha$$

Ejemplo. Calcular todas las razones trigonométricas en los siguientes casos:

a. $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{3} : \alpha < 90^\circ$

b. $\cos\alpha = -\frac{3}{5} : \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c. $\text{tag}\ \alpha = 2 : 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

d. $\text{cosec}\ \alpha = -\frac{3}{2} : 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

e. $\sec\alpha = -2 :\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

f. $\text{cotag}\ \alpha = -1 : 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

Solución.

a. $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{3}$ Sí $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha \in 1^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\ \alpha;\ \text{cosec}\ \alpha > 0 \\ \cos\alpha;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\ \alpha;\ \text{cotag}\ \alpha > 0 \end{cases}$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{1/3} = 3 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}/3} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}/4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

b. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$: Sí $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in 2^{\text{o}}$ Cuadrante: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha;\ \operatorname{cosec}\alpha > 0 \\ \cos\alpha;\ \sec\alpha < 0 \\ \operatorname{tag}\alpha;\ \operatorname{cotag}\alpha < 0 \end{cases}$

Conocido el valor del coseno se calcula el seno mediante la ecuación fundamental.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-3/5} = -\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{-4/3} = -\frac{3}{4}$$

c. $\operatorname{tag}\alpha = 2$: Sí $180^{\text{o}} < \alpha < 270^{\text{o}} \Rightarrow \alpha \in 3^{\text{o}}$ Cuadrante: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha;\ \operatorname{cosec}\alpha < 0 \\ \cos\alpha;\ \sec\alpha < 0 \\ \operatorname{tag}\alpha;\ \operatorname{cotag}\alpha > 0 \end{cases}$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la cotangente y la secante.

$$\operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha:\ \sec\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{tag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{2^2+1} = -\sqrt{5}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}:\ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por último del seno se obtiene la cosecante.

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{5}/5} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

d. $\text{cosec}\ \alpha = -\frac{3}{2}$: Sí $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in 4^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\ \alpha\ ;\ \text{cosec}\ \alpha < 0 \\ \cos\alpha\ ;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\ \alpha\ ;\ \text{cotag}\ \alpha < 0 \end{cases}$

De la definición de cosecante se obtienen el seno y la cotangente.

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} : \ \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\text{cosec}\ \alpha} = \frac{1}{-3/2} = -\frac{2}{3}$$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2/3}{\sqrt{5}/3} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas las razones directas (coseno y tangente) se calculan la inversas (secante y cotangente) mediante su definición.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/3} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cotag}\ \alpha = \frac{1}{\text{tag}\ \alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{5}/5} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

e. $\sec\alpha = -2$: Sí $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 3^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\ \alpha\ ;\ \text{cosec}\ \alpha < 0 \\ \cos\alpha\ ;\ \sec\alpha < 0 \\ \text{tag}\ \alpha\ ;\ \text{cotag}\ \alpha > 0 \end{cases}$

Conocida la secante se calcula el coseno y la tangente.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \ \text{tag}\ \alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = +\sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{3}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\ \alpha = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conocidas las razones directas (seno y tangente) se calculan la inversas (cosecante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} : \ \text{cotag}\ \alpha = \frac{1}{\text{tag}\ \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

f. $\text{cotag}\ \alpha = -1$: Sí $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in 4^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\ \alpha\ ;\ \text{cosec}\ \alpha < 0 \\ \cos\alpha\ ;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\ \alpha\ ;\ \text{cotag}\ \alpha < 0 \end{cases}$

Conocida la cotangente se calcula la tangente y la cosecante.

$$\text{cotag}\ \alpha = \frac{1}{\text{tag}\ \alpha} \qquad \text{tag}\ \alpha = \frac{1}{\text{cotag}\ \alpha} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{cotag}^2\alpha + 1 = \text{cos ec}^2\alpha \qquad \text{cosec}\ \alpha = \pm\sqrt{\text{cotag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{(-1)^2 + 1} = -\sqrt{2}$$

Conocida la cosecante se calcula el seno

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\text{cosec}\ \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con el seno y la tangente se calcula el coseno con la definición de tangente.

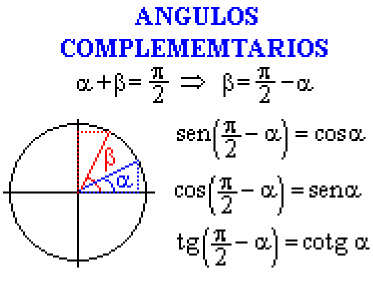
$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{tag}\ \alpha} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

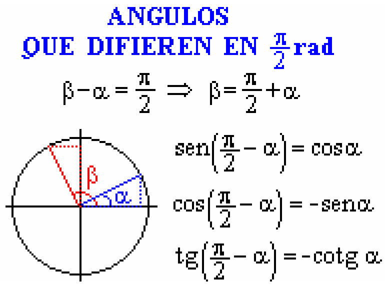
Conocido el coseno se calcula la secante.

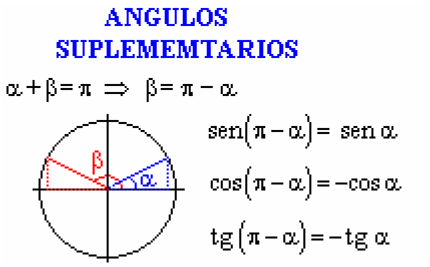
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

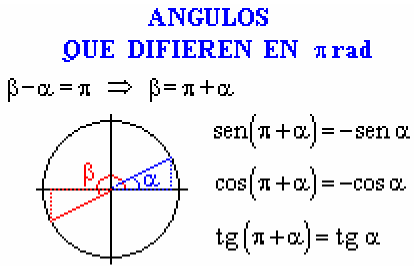
Ángulos asociados

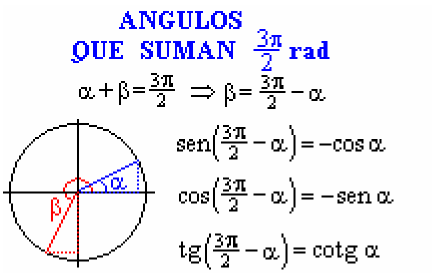
Se definen como ángulos asociados aquellos que tienen sus razones trigonométricas relacionadas. Este tipo de relaciones permite conocer las razones trigonométricas de cualquier ángulo de la circunferencia con las de un ángulo del primer cuadrante.

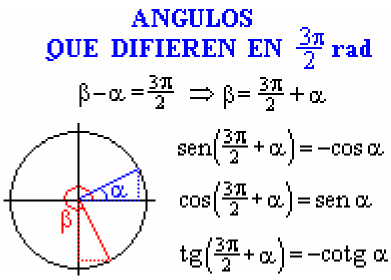


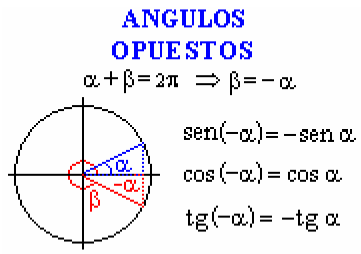


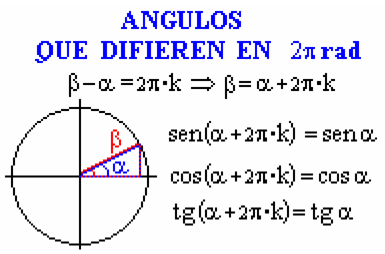












Más que aprenderlas de memoria conviene aprender a representarlas y de esta forma poder establecer la relación entre ellas. Observar que en todas ellas siempre se trabaja con triángulos semejantes, y es cuestión de localizar las posibles igualdades.

Razones trigonométricas de adición

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$
$$\text{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta}$$

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$
$$\text{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\,\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\text{sen}\,(2\alpha)=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha$$
$$\text{tg}(2\alpha)=\frac{2\cdot\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad;\quad\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\quad;\quad\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Transformaciones de sumas en productos

$$\text{sen}\,A+\text{sen}\,B=2\cdot\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\text{sen}\,A-\text{sen}\,B=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A-\cos B=-2\cdot\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\text{tg}\,A+\text{tg}\,B=\frac{\text{sen}(A+B)}{\cos A\cdot\cos B}$$
$$\text{tg}\,A-\text{tg}\,B=\frac{\text{sen}(A-B)}{\cos A\cdot\cos B}$$